

Exercices en logique formelle

1 Logique des propositions

1.1 Interprétations et valeur de vérité

Calculer la valeur de vérité de la formule

$$p \rightarrow \neg q$$

dans ses 4 interprétations possibles.

1.2 Validité

Trouver au moins un exemple de formule

1. Contingente
2. Valide
3. Instatisfiable

1.3 Traduction

Traduire les phrases suivantes en formules de la logique des propositions et étudier leur validité :

1. Quand il fait beau, Jean est heureux ; il fait beau ; donc, Jean est heureux.
2. Quand il fait beau, Jean est heureux ; or, Jean est malheureux ; donc il ne fait pas beau.

2 Logique des prédicats

2.1 Interprétation et validité

Considérons la formule $\forall x p(x, f(x))$ où p est un prédicat et f une fonction.

Trouver une interprétation qui rend cette formule vraie et une interprétation qui rend cette formule fausse.

Que peut-on en déduire sur la validité de cette formule ?

2.2 Interprétation et validité (bis)

Soit $F \equiv (\forall x \exists y p(x, y)) \rightarrow \exists y p(y, y)$.

Dans les interprétations suivantes, dites si la formule F est vraie ou fausse :

1. $D = \{\text{hommes}\}$ et $p(x, y)$ signifie “ x est le père de y ”
2. $D = \{\text{hommes}\}$ et $p(x, y)$ signifie “ y est le père de x ”
3. $D = \mathbb{R}$ et $p(x, y)$ signifie “ $x \neq y$ ”

Que peut-on en déduire sur la validité de F ?

2.3 Traduction

Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Tous les politiciens parlent à la radio. Parmi les gens qui parlent à la radio, certains sont des menteurs. Donc, quelques politiciens sont menteurs.
2. Tous les blonds sont paresseux. Comme tous les étudiants sont blonds, on peut en déduire que tous les étudiants sont paresseux.

Que pensez-vous de la validité de ces formules ? êtes-vous en mesure de le prouver ?