Grammaires et automates : exercices

1 Typologie des langages

Pour l'alphabet $A = \{a,b,c\}$, considérons les trois langages suivants :

1. $L_1 = \{a^n b^m c^p | m,n,p \geq 0\}$: "un certain nombre de a's suivi d'un certain nombre de b's, suivi d'un certain nombre de c's, mais ces trois nombres sont sans rapport". Exemples : *abbbcc*, *aac*, *bbbccc*, ε (chaîne vide), ...
2. $L_1 = \{a^n b^n c^m | n,m \geq 0\}$: "un certain nombre de a's suivi du *même nombre* de b's, suivi d'un certain nombre de c's". Exemples : *aabbc*, *ab*, *ccc*, ...
3. $L_1 = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$: "un certain nombre de a's suivi du *même nombre* de b's, suivi du *même nombre* de c's". Exemples : *abc*, *aabbcc*, ...

Pour chacun de ces trois langages :
- Essayer de deviner de quel type il est (dans la classification de Chomsky).
- Donner une grammaire permettant de le générer.
- Les techniques vues pour les compilateurs (expressions régulières, grammaires (E)BNF) permettent-elles de générer ce langage ? si oui, montrer comment.

2 Langages réguliers

Soit $L \in \{a,b\}^*$ le langage formé des mots contenant un nombre pair de a. Par exemple, *aa*, *b*, *aababba*, *ababaa* font partie de L et *a*, *abaa*, *abbabba* n'en font pas partie.

Définir L par...

1. ... un automate à états finis ;
2. ... une grammaire régulière ;
3. ... une expression régulière.

3 Langages hors contexte

Soit $L \in \{a,b,c\}^*$ le langage formé des "palindromes avec élément central", c'est-à-dire des mots de la forme wcw^R avec $w \in \{a,b\}^*$ et où w^R est "w lu depuis la fin".

Exemples
- *aca*

– *aabcbaa*
– *ababbacabbaba*

Contre-exemples
– *aba*
– *abacab*

Définir L à l'aide...

1. ... d'un automate à pile
2. ... d'une grammaire hors contexte
3. ... d'une grammaire BNF

Les exercices 4 et 5 peuvent être faits sur papier, mais on pourra mieux vérifier ses solutions en utilisant un simulateur de machine de Turing tel que le programme `turing.py` disponible sur le serveur.

4 Langages contextuels

4.1 $a^n b^n c^n$

Nous avons vu à l'exercice 1 une grammaire contextuelle pour le langage $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$. Proposer une machine de Turing définissant ce même langage.

4.2 wcw

Considérons le langage des "mots répétés avec élément central", c'est-à-dire $L = \{wcw | w \in \{a,b\}*\} \subset \{a,b,c\}^*$.

Exemples :
– *abcab*
– *aaabacaaba*
– *c*

Contre-exemples
– *abab*
– *aabacabaa*
– *abc*

Définir L à l'aide...

1. d'une machine de Turing
2. d'une grammaire hors contexte

5 Calculabilité

Définir une machine de Turing qui réalise des additions en notation "unaire", c'est à dire que si la bande est initialisée avec une chaîne de la forme $|^n + |^m$, la machine va s'arrêter avec une chaîne de la forme $|^{n+m}$. Exemple :
– $||| + || \rightsquigarrow |||||$